# Generalized hypergeometric functions satisfying algebraic equations (Deformation of differential equations and asymptotic analysis)



加藤, 満生

数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 110-111



# Generalized hypergeometric functions satisfying algebraic equations

琉球大学・教育学部　加藤満生 (Mitsuo Kato)
College of Education, University of the Ryukyus

一般型超幾何関数

$$ {}_nF_{n-1}(a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1};b_1,b_2,...,b_{n-1};z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(a_j,k)}{\prod_{j=1}^{n-1}(b_j,k)k!}z^k, $$

$(a,k)=\Gamma(a+k)/\Gamma(a)$, は $z=0$, 1 and $\infty$ に特異点をもつ、$n$ 階のフックス型微分方程式

$$ {}_nE_{n-1}(a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1};b_1,b_2,...,b_{n-1}) $$

をみたす。Beukers and Heckman [B-H] は有限既約モノドロミー群をもつ ${}_nE_{n-1}$ を決定している。その中で，次のことが述べられている (Theorem 5.8) : 既約で imprimitive なモノドロミー群をもつ ${}_nE_{n-1}$ は本質的には, 次のもので与えられる。

$$ (1)\qquad {}_nE_{n-1}\Big(\frac{-\alpha}{p},\frac{-\alpha+1}{p},\cdots,\frac{-\alpha+p-1}{p},\frac{\alpha}{q},\frac{\alpha+1}{q},\cdots,\frac{\alpha+q-1}{q};\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}\Big), $$

ここに、p, q は 互いに素な正整数で、$n=p+q$。この微分方程式 (1) に関して, 神戸大学野海教授と行った共同研究 (to appear in Tohoku Math. J.) の概要を以下に述べる。

$$ c_k(\alpha,s)=\alpha(\alpha+ks+1,k-1)/k! \quad (k\geq 1), $$
$$ \psi(\alpha,s,x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\alpha,s)x^k $$

により定義された一般２項関数　$\psi(\alpha,s,x)$ は、$s=-p/n$ のとき

$$ z=(-p)^pq^qn^{-n}x^n $$

の関数として微分方程式 (1) をみたし、さらに $\alpha = -1/(mn)$ のときは、代数方程式

$$y^{mn} + xy^{mp} - 1 = 0 \tag{2}$$

の解にもなる。これらのことはLambert, Mellin 等により 知られている。

特に, $\alpha = -1/(mn)$, $m \geq 2$ のとき、(2) の 1 次独立な $n$ 個の解は, ($z$ の関数として) (1) の解の基本系を与えることがわかる。従って, (1) の射影モノドロミー群は imprimitive で有限既約, その位数は $m^{n-1}n!$ となる。また、これらの 1 次独立な $n$ 個の解の比によって定義される $\mathbf{C} - \{0, 1, \infty\}$ から $\mathbf{P}^{n-1}$ への多価写像 (Schwarz map) の像 (の閉包) は、(2) の根と係数の関係より, $\mathbf{P}^{n-1}$ 内の既約代数曲線

$$\{[y_0 : y_1 : \cdots : y_{n-1}] \in \mathbf{P}^{n-1} \,|\, \sigma_k(y_0^m, y_1^m, \cdots, y_{n-1}^m) = 0,\ 1 \leq k \leq n-1,\ k \neq n-p\},$$

に等しいことがわかる、ここに $\sigma_k$ は $k$ 次の elementary symmetric function をあらわす。これらの証明は, $\psi(\alpha, s, x)$ のもつ性質を利用して, 射影モノドロミー群の生成元を具体的に求めることによりなされる。

特別の場合 : $n = 3$, $p = 1$, $m = 1$ のときは、(2) は 3 次方程式となり、$\psi(-1/3, -1/3, x)$ はその根となるので、この一般 2 項関数を考察することにより、3 次方程式に対するカルダノの公式が、超幾何関数論の範囲内で求まることになる。